

ΕΡΓΑΣΙΑ 2 **ΕΡΓΟ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ**

1. Σώμα μάζας $m=10\text{Kg}$ κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση δύναμης με μέτρο $F=100\text{N}$ που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi=30^\circ$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu=0,5$, να βρείτε το έργο της F , το έργο της τριβής και το έργο του βάρους για μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο κατά 10m . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

2. Σώμα μάζας $m=10\text{Kg}$ κινείται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$, με την επίδραση δύναμης μέτρου $F=200\text{N}$ που έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu=0,1$, να βρείτε τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα όταν το σώμα μετατοπίζεται κατά 20m πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

3. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu=0,2$.

α) Να βρείτε το έργο της F και το έργο της τριβής για μετατόπιση του σώματος κατά 10m .

β) Ποιες ενεργειακές μετατροπές παρατηρούνται κατά τη μετατόπιση του σώματος κατά 10m ;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

4. Μια μικρή σφαίρα είναι δεμένη στην άκρη νήματος μήκους $L=1\text{m}$, η άλλη άκρη του οποίου είναι δεμένη σε σταθερό σημείο O . Η σφαίρα εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά γωνία φ και αφήνεται να κινηθεί. Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή που περνάει από την κατακόρυφη θέση. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $\sin\varphi=0,2$.

5. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ ρίχνεται προς τα πάνω από τη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0=20\text{m/s}$. Να βρεθούν η κινητική, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια του σώματος στις θέσεις :

α) το σημείο εκτόξευσης,

β) το σημείο που απέχει απ' το σημείο εκτόξευσης 30m ,

γ) το ανώτερο σημείο της τροχιάς.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Δυναμική ενέργεια μηδέν να θεωρηθεί στο σημείο εκτόξευσης του σώματος.

6. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ ρίχνεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $u_0=6\text{m/s}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu=2\sqrt{3}/3$.

α) Ποιες ενεργειακές μετατροπές έχουμε καθώς το σώμα ανεβαίνει;

β) Πόση απόσταση διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του;

γ) Πόση θερμότητα μεταφέρθηκε από το σώμα στο περιβάλλον κατά την άνοδο του σώματος;

δ) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Δυναμική ενέργεια μηδέν να θεωρηθεί στο σημείο εκτόξευσης του σώματος.

7. Αεροπλάνο πετάει οριζόντια σε ύψος $h=220\text{m}$ με ταχύτητα μέτρου $u_0=100\text{m/s}$. Αν αφήσουμε ένα σώμα από το αεροπλάνο, ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας

του όταν χτυπήσει στο έδαφος; Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψιν. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

8. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα u_0 και φτάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του έχοντας διανύσει διάστημα 5m . Να βρεθούν :

α) Η ταχύτητα u_0 .

β) Η ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν επιστρέψει στο σημείο εκτόξευσης.

γ) Η κινητική, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο εκτόξευσης, στο ανώτερο σημείο και στο σημείο που απέχει από το σημείο εκτόξευσης 2m .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Δυναμική ενέργεια μηδέν να θεωρηθεί στο σημείο εκτόξευσης του σώματος.

Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψιν.

9. Κιβώτιο μάζας $m=20\text{Kg}$ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο. Τη στιγμή που το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου $u_0=10\text{m/s}$, δέχεται από εργάτη οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F=50\text{N}$, ίδιας κατεύθυνσης με εκείνης της u_0 . Αν η δύναμη τριβής που δέχεται το κιβώτιο από το δάπεδο έχει μέτρο $T=69\text{N}$, να βρείτε μετά από διάστημα $s=10\text{m}$:

α) Το έργο της F και το έργο της τριβής.

β) Την τελική ταχύτητα του σώματος.

10. Σώμα μάζας $m=2,75\text{Kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο όταν ασκείται σ' αυτό οριζόντια δύναμη F της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με τη θέση με βάση τη σχέση $F=5x+3$ (SI). Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό βρεθεί στη θέση $x=1\text{m}$.

11. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F=8\text{N}$ οπότε το σώμα ολισθαίνει. Να βρεθούν:

α. Η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F και η στιγμιαία ισχύς της τριβής, τις στιγμές που το σώμα έχει διανύσει διάστημα $s=6\text{m}$ και $s=24\text{m}$.

β. Η μέση ισχύς της δύναμης F και η μέση ισχύς της τριβής, από την αρχή της κίνησης μέχρι τη στιγμή που το σώμα έχει διανύσει διάστημα $s=6\text{m}$ και από την αρχή της κίνησης μέχρι τη στιγμή που το σώμα έχει διανύσει διάστημα $s=24\text{m}$.

Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=0,1$ και $g=10\text{m/s}^2$.

12. Ρυμουλκό με τη βοήθεια ενός κινητήρα, τραβάει ένα όχημα κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u=2\text{m/s}$, ασκώντας σταθερή δύναμη μέτρου $F=5000\text{N}$.

α. Να βρεθεί η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F και του βάρους τη στιγμή $t=5\text{s}$ αν $t=0$ θεωρηθεί η στιγμή που το όχημα αποκτά τη σταθερή ταχύτητα.

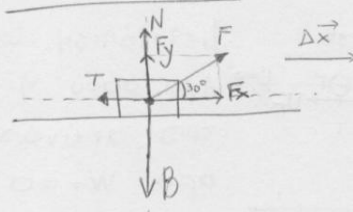
β. Να βρεθεί η μέση ισχύς της δύναμης F και του βάρους από τη στιγμή $t=0$ έως τη στιγμή $t=5\text{s}$.

Από το σχολικό βιβλίο, οι ερωτήσεις **1-28** και οι ασκήσεις **1-19**.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1

Άσκηση 1



$$F_x = F \cdot \cos 30 = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin 30 = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ N}$$

$$N + F_y = B \rightarrow N = B - F_y \rightarrow$$

$$N = 10 \cdot 10 - 50 \rightarrow N = 50 \text{ N}$$

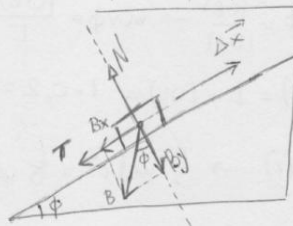
$$T = \mu N = 0,5 \cdot 50 \rightarrow T = 25 \text{ N}$$

$$W_F = F \cdot s \cdot \cos 30 = 100 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3} \text{ J}$$

$$W_T = T \cdot s \cdot \cos 180 = -T \cdot s = -25 \cdot 10 = -250 \text{ J}$$

$$W_B = B \cdot s \cdot \cos 90 = 100 \cdot 10 \cdot 0 = 0$$

Άσκηση 2



$$B_x = B \sin \phi = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ N}$$

$$B_y = B \cos \phi = 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$N = B_y = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

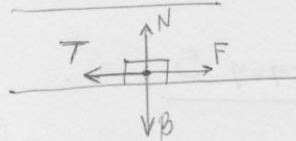
$$T = \mu N = 0,1 \cdot 50\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ N}$$

$$W_N = N \cdot s \cdot \cos 90 = 0$$

$$W_T = T \cdot s \cdot \cos 180 = -T \cdot s = -5\sqrt{3} \cdot 20 = -100\sqrt{3} \text{ J}$$

$$W_B = W_{B_x} = B_x \cdot s \cdot \cos 180 = -B_x \cdot s = -50 \cdot 20 = -1000 \text{ J}$$

Άσκηση 3



$$N = B = m \cdot g = 20 \text{ N}$$

αφού $\mu = 0,2$ είναι

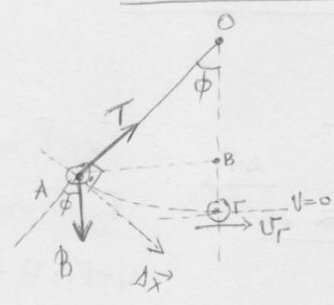
$$\sum F_x = 0 \rightarrow T = F = \mu N = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ N}$$

άρα α) $W_F = F \cdot s \cdot \cos 0 = F \cdot s = 4 \cdot 10 = 40 \text{ J}$

$$W_T = T \cdot s \cdot \cos 180 = -T \cdot s = -4 \cdot 10 = -40 \text{ J}$$

β) Η δύναμη \vec{F} προσφέρει ενέργεια 40 J στο σώμα η οποία όλη μετατρέπεται σε θερμότητα μέσω του τριβής.

Άσκηση 4



Σε μια τυχαία θέση της τροχιάς, το σώμα θεωρούμε ότι έχει τη βέλτιστη θέση των εφοπιζόμενων. Άρα αφού η \vec{T} έχει τη διεύθυνση της ακτίνας θα είναι $\vec{T} \perp \Delta\vec{x}$ άρα $W_T = 0$. Έτσι η μόνη δύναμη που το έργο της δεν είναι μηδέν είναι το βάρος και άρα ισχύει η ΑΔΜΕ.

α' τρόπος
με Θ.Μ.Κ.Ε.

$$\Delta K = W_{ολ} \rightarrow K_{\Gamma} - K_A = W_B + W_T \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_{\Gamma}^2 = W_B \text{ (1) Είναι } W_B = U_A - U_{\Gamma} = m g (B\Gamma)$$

$$\text{Από το τρίγωνο } OAB \text{ είναι } \cos \phi = \frac{(OB)}{(OA)} \rightarrow \cos \phi = \frac{(OB)}{L} \rightarrow (OB) = L \cdot \cos \phi$$

$$\rightarrow (OB) = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ m άρα } (B\Gamma) = L - (OB) = 1 - 0,2 = 0,8 \text{ m}$$

$$\text{άρα } W_B = m \cdot 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ m και (1) } \rightarrow \frac{1}{2} m v_{\Gamma}^2 = 8 \text{ m } \rightarrow v_{\Gamma}^2 = 16$$

$$\rightarrow v_{\Gamma} = 4 \text{ m/s.}$$

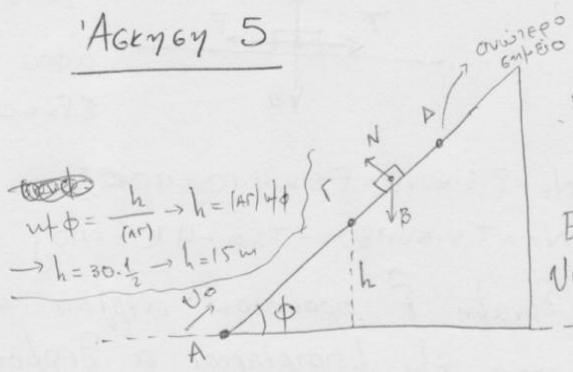
β' τρόπος
με Α.Δ.Μ.Ε.

$$E_{M(A)} = E_{M(\Gamma)} \rightarrow K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \rightarrow m g (B\Gamma) = \frac{1}{2} m v_{\Gamma}^2 \rightarrow \dots$$

Άσκηση 5

(ΑΓ) = 30 m

	A	Γ	Δ
K	400	100	0
U	0	300	400
E	400	400	400



$$K_A = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2$$

$$\rightarrow K_A = 400 \text{ J}$$

$$E_A = K_A + U_A^0 = 400 \text{ J}$$

$$U_{\Gamma} = m g h = 2 \cdot 10 \cdot 15 = 300 \text{ J}$$

$$U = 0$$

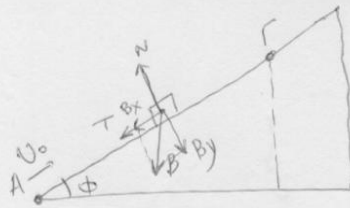
$$\sin \phi = \frac{h}{(ΑΓ)} \rightarrow h = (ΑΓ) \sin \phi$$

$$\rightarrow h = 30 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow h = 15 \text{ m}$$

Αφού $W_T = 0$ και το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, θα είναι $E = K + U = 600 \text{ J}$.

Άσκηση 6

3



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = B_y$$

$$B_x = B \sin \phi$$

$$B_y = B \cos \phi$$

- α) Η κινητική ενέργεια που έχει το σώμα στο σημείο Α, μετατρέπεται κατά την άνοδο σταδιακά σε δυναμική (έρσο του βάρους) και σε θερμότητα (έρσο της τριβής).

$$\beta) \Delta K = W_{o1} \rightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_N + W_T + W_B \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} m U_0^2 = -T \cdot s - B \sin \phi \cdot s \rightarrow \frac{1}{2} m U_0^2 = \mu N s + B \sin \phi s \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \mu U_0^2 = \mu \sin \phi \cos \phi \cdot s + \sin \phi \cdot s \rightarrow U_0^2 = 2 \mu g \cos \phi s + 2 g \sin \phi s \rightarrow$$

$$36 = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \rightarrow 36 = 20s + 10s \rightarrow 36 = 30s \rightarrow$$

$$s = \frac{36}{30} \Rightarrow s = 1.2 \text{ m}$$

$$\delta) W_T = -T \cdot s = -\mu m g \cos \phi \cdot s = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1.2 = -24 \text{ J}$$

$$\text{ήρα } Q = |W_T| = 24 \text{ J}$$

$$\epsilon) U_\Gamma = mgh = mg s \sin \phi = 2 \cdot 10 \cdot 1.2 \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ J}$$

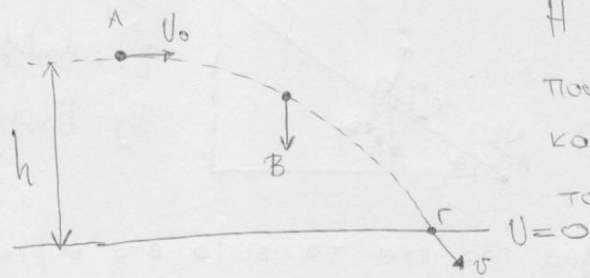
~~ΚΑ = UΓ + Q → UΓ = ΚΑ - Q~~

$$K_A = U_\Gamma + Q \rightarrow U_\Gamma = K_A - Q \quad \left(\begin{array}{l} \text{αρχή διατήρησης} \\ \text{ενέργειας} \end{array} \right)$$

$$K_A = \frac{1}{2} m U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36 = 36 \text{ J} \quad \text{ήρα } U_\Gamma = 36 - 24 = 12 \text{ J}$$

Άσκηση 7

(4)



Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα κατά την πτώση, είναι το βάρος του.

α' τροπος

A Δ Μ Ε

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\frac{1}{2} m U_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m U^2 \rightarrow U^2 = 2gh + U_0^2 \rightarrow U = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 220 + 10000}$$

$$\rightarrow U = \sqrt{4400 + 10000} = \sqrt{14400} = \sqrt{144 \cdot 10^2} = 12 \cdot 10 = 120 \text{ m/s}$$

β' τροπος

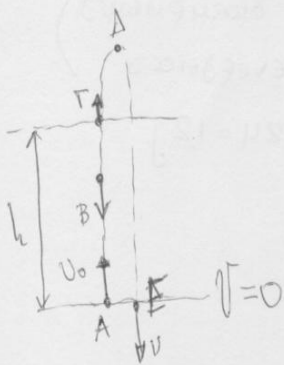
Θ Μ Κ Ε

$$\Delta K = W_{\text{ολ}} \rightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B$$

$$W_B = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = mgh - 0 = mgh \quad \text{αρχ}$$

$$\frac{1}{2} m U^2 - \frac{1}{2} m U_0^2 = mgh \rightarrow U^2 - U_0^2 = 2gh \rightarrow \dots$$

Άσκηση 8

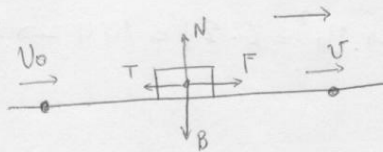


	K	U	E
A	100	0	100
Γ	60	40	100
Δ	0	100	100

Αφού η μοναδική δύναμη είναι το βάρος που είναι συντηρητική, θα είναι $E = \text{const}$.
 Είναι $U_B = mgh_{\text{max}} = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100 \text{ J}$
 και $E_B = K_B + U_B = 0 + 100 = 100 \text{ J}$
 $U_\Gamma = mgh = 2 \cdot 10 \cdot 2 = 40 \text{ J}$

Агрегаты 9

(5)



a) $W_F = F \cdot s = 50 \cdot 10 = 500 \text{ J}$

$W_N = W_B = 0$

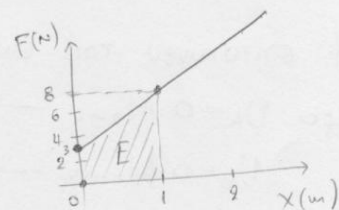
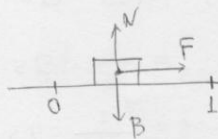
$W_T = -T \cdot s = -69 \cdot 10 = -690 \text{ J}$

b) $\Delta K = W_{\text{ол}} \rightarrow K_{\text{зд}} - K_{\text{опх}} = W_F + W_T \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_F + W_T$

$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^2 = 500 - 690 \rightarrow 10 v^2 = 1000 - 190$

$\rightarrow v^2 = 81 \rightarrow v = 9 \text{ m/s}$

Агрегаты 10



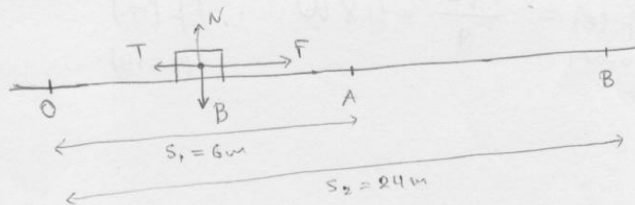
ФМKE

$\Delta K = W_{\text{ол}} \rightarrow K_{\text{зд}} - K_{\text{опх}} = W_F \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = W_F$

$W_F = E_{\text{плош}} = \frac{(8+3) \cdot 1}{2} = \frac{11}{2} \text{ J}$ зрх

$\frac{1}{2} \cdot 2,75 \cdot v^2 = \frac{11}{2} \rightarrow v^2 = \frac{11}{2,75} = 4 \rightarrow v = 2 \text{ m/s}$

Агрегаты 11



$T = \mu N = \mu m g = 0,1 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \text{ N}$

ФМKE (O → A) : $\Delta K = W_{\text{ол}} \rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = W_F + W_T + W_N + W_B \rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_A^2 = F \cdot s_1 - T \cdot s_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_A^2 = 8 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \rightarrow v_A^2 = 36 \rightarrow v_A = 6 \text{ m/s}$

6

$$\Theta \text{ΜΚΕ } (0 \rightarrow B) : \frac{1}{2} m U_B^2 - 0 = F \cdot s_2 - T \cdot s_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot U_B^2 = 8 \cdot 24 - 2 \cdot 24 \rightarrow U_B^2 = 6 \cdot 24 = 144 \rightarrow U_B = 12 \text{ m/s.}$$

Άρα

$$\alpha) P_{F(A)} = F \cdot U_A \cdot \cos 0 = 8 \cdot 6 = 48 \text{ W}$$

$$P_{T(A)} = T \cdot U_A \cdot \cos 180 = -T \cdot U_A = -2 \cdot 6 = -12 \text{ W}$$

$$P_{F(B)} = F \cdot U_B = 8 \cdot 12 = 96 \text{ W}$$

$$P_{T(B)} = -T \cdot U_B = -2 \cdot 12 = -24 \text{ W}$$

$$\beta) P_{F(F)} = \frac{W_{F(0 \rightarrow A)}}{\Delta t_{0 \rightarrow A}}, \quad P_{T(T)} = \frac{W_{T(0 \rightarrow A)}}{\Delta t_{0 \rightarrow A}}$$

$$\text{Η επιτάχυνση του σώματος είναι } a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F-T}{m} = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Άρα } U_A = a \cdot \Delta t_{0 \rightarrow A} \rightarrow \Delta t_{0 \rightarrow A} = \frac{6}{3} = 2 \text{ s.}$$

$$U_B = a \cdot \Delta t_{0 \rightarrow B} \rightarrow \Delta t_{0 \rightarrow B} = \frac{12}{3} = 4 \text{ s}$$

$$W_{F(0 \rightarrow A)} = F \cdot s_1 = 8 \cdot 6 = 48 \text{ J}$$

$$W_{T(0 \rightarrow A)} = -T \cdot s_1 = -2 \cdot 6 = -12 \text{ J}$$

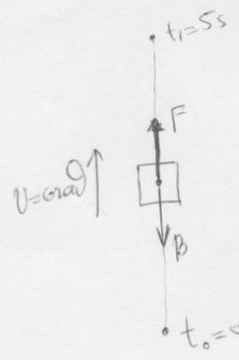
$$\text{άρα } P_{F(F)} = \frac{48}{2} = 24 \text{ W}, \quad P_{T(T)} = \frac{-12}{2} = -6 \text{ W}$$

$$W_{F(0 \rightarrow B)} = F \cdot s_2 = 8 \cdot 24 = 192 \text{ J}$$

$$W_{T(0 \rightarrow B)} = -T \cdot s_2 = -2 \cdot 24 = -48 \text{ J}$$

$$\text{άρα } P_{F(F)} = \frac{192}{4} = 48 \text{ W}, \quad P_{T(T)} = \frac{-48}{4} = -12 \text{ W}$$

Άσκηση 12



Αφαι $v=6\text{m/s} \rightarrow F=B$

α) Η συζησία ισχύος μιας δύναμης είναι

$P_F = F \cdot v \cdot \cos\phi$ Αρα αν $F=6\text{m/s}$ και $v=6\text{m/s}$ είναι $P_F=6\text{m/s}$

Αρα $P_F = F \cdot v = 5000 \cdot 2 = 10.000 \text{ W} = 10 \text{ kW}$

$P_B = B \cdot v \cdot \cos 180 = -5000 \cdot 2 = -10.000 \text{ W} = -10 \text{ kW}$

Αντιδή με όσο ρυθμό προσφέρεται ενέργεια ως βίτα μέσω της F, με τόσο ρυθμό αυξάνεται η δυναμική του ενέργεια.

β) Όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, τότε ο ρυθμός μεταβολής του είναι ίσος με το μέγεθος. Αρα $P_{F(F)} = 10 \text{ kW}$, $P_{F(B)} = -10 \text{ kW}$.